4.4 メタ論理学との比較

諸君は第 2.1 節でロールズが <公正としての正義> を数学基礎論と比較していたことを憶えているだろうか? 我々のここまでの議論によってロールズのその比較が当を得ていたことが益々はっきりしてきたと言える。本章の最後にそのことを説明しよう。

現代の数理論理学（数学基礎論）は様々な論理体系がいかなる性質を持つかを問題とする「論理学の論理学」即ちメタ論理学である。それはもはや、アリストテレス、ライプニッツ、カントなどの過去の哲学者たちが論理学に対して抱いた関心の有り方とは大きく異なっている。つまりアリストテレスのような古代から近代初頭までの論理学者は論理それ自体に関心を持っていたのであるが、20 世紀に入ってフレーゲやラッセル/ホワイトヘッド、ヒルベルトあるいはゲーデルといった数学者たちは、論理に関する認識を深めるためには先ず論理学の体系を形式化し、それに対して数学的な分析を加えることが有効であることに気がついたのであった。ゲーデル等が証明した諸定理は、論理学の定理というよりむしろ論理体系についての定理、即ちメタ定理なのである。

こうした関心の移動とそれに伴う理論の抽象化はまさに、ロールズ以前の政治哲学と彼以後のそれに生じた学問の変化に正確に一致する。原初状態とは形式化された社会（のモデル）であり、公正として正義はその社会モデルの中でいかなる権利概念、正義原理が意味を持つかを（メタレヴェルから）考察したのであったことを思い出そう。従って <公正としての正義> は一つのメタ倫理学であり、我々がそこで得た結果、即ち定理 1 ～ 5 は正確にはメタ定理なのである（今後に証明する他の定理も同様である）。そして政治哲学以外の社会科学の諸分野でも、例えばノイマン・モルゲンシュテルン [9] とナッシュ [8] によるゲーム理論、アロー [1] による社会選択理論、アロー・デブリュー [2] による一般均衡理論等々において、そういった学問の理論構成は皆同一の流れの中で生じたことが現在の我々の位置からは見て取れるのである。つまりそれらの理論分野で用いられるモデルは皆、現実の記述ではなく分析のための表象装置である。人々はしばしば、そういった理論モデルが「余りに抽象的」でありそれゆえ「非現実的」である等と批判するが、そうした「批判」はこうしたメタ理論に対する無理解に基づく的外れなものである。そこで以上の（それこそ?）抽象的に述べてきた事柄を諸君により具体的に実感してもらうために、補論でゲーデルの定理の証明のあらましをやや詳しく紹介する。但しこの補論は以下の講義内容とは関係ないので、興味のない諸君はそれを飛ばしても差し支えない。

ゲーデルの不完全性定理は、この後で説明する 1 階算術（ペアノ 算術）*1 の中に肯定も否定も証明されない命題（いわゆる決定不可能な命題）が存在することを主張する数学基礎論の（メタ）定理である。ゲーデルの定理の一般的性格についてロッサー*2 は次のように述べている。

---

*1 こうした用語は補論の中できちんと説明する。以下で直ぐに述べる「形式体系 L」、「論理式 G」などについても同様である。

*2 ゲーデルの定理ではペアノ算術の ω-無矛盾性と呼ばれる条件（補論参照）が仮定されていたが、ロッサー [10] はそれを単なる無矛盾性に弱めることに成功した。引用した論文 [11] は数学基礎論の非専門家に対して不完全性定理の考え方を非常に判りやすく解説しており、補論を読む前に一読しておくと理解を助けると思う。

> ゲーデルの定理と [それと同種の] チャーチの定理のどちらの証明においても二つの論理 [言語] が関わっている。一つは「通常の言語」として証明の遂行のために用いられ、他方は形式論理体系 L であって、定理はそれに関して証明されるのである [11, p.61]。

「形式論理体系 L」を「原初状態」に置き換えれば、ロッサーの言葉はまさに前節までに <公正としての正義> に関して我々の行ってきた事柄と同じことを述べている。つまり我々は先ず原初状態を「市民（当事者）」や「権利」といった諸概念とともに抽象的に設定（定義）した。これらは語句としては「通常の言語」の中で日常的に用いられる言葉と同じであるが、あくまで原初状態（形式体系）の中で理論的（形式的）に用いられる概念であった。我々の得た諸定理は、通常言語を用いて原初状態の中で証明された。それらの証明は道理に適った論証であることを常に心がけて行われ、決して難解なものではなかったはずである。ゲーデルの証明もメタレヴェルの言語（通常言語）とオブジェクトレヴェルの言語（形式体系）をはっきりと区別して、自分が今どちらの言語にどのように関わっているのかを常に意識していれば[*3]、証明は技術的には少々複雑であるが、それ程難しいものではない。その基本的なアイデアはゲーデル自身が論文の中で注意しているように、良く知られた「嘘つきのパラドックス（自己言及性のパラドックス）」の応用である。つまり、「自分は嘘をついている（自分の述べていることは真ではない）」という言明それ自身の真偽が決定不可能であることは直ぐに分かるが、それと良く似た考えで、形式体系 L の中に「自分自身が証明不可能である」ことを表す命題（論理式）G（**ゲーデル文**と呼ばれる）を構成するのである。そのためにメタレヴェルで我々（数学者）が通常「命題」、「証明」、「証明可能な命題」等々と考える諸概念を、**帰納的（再帰的）関数**（recursive function）と呼ばれる関数を用いて形式体系 L の中に（つまりオブジェクトレヴェルで）定義する。ゲーデル文 G はこれらからある巧妙な手続きを経て導出される。この G が即ち「決定不可能命題」である。注意すべきことは、ゲーデル文それ自身とその構成に用いた「命題」や「証明」、「証明可能な命題」といった諸概念は形式体系 L の中でオブジェクトレヴェルに位置するのであり、それらは形式言語によって記述されるが、他方帰納的関数は通常言語に属する概念であって、従ってそれはメタレヴェルに位置すること、帰納的関数は証明を行うための言わば「道具」に過ぎず定理の対象とする形式体系には属さない、ということである。どちらも同じような数学記号を用いて表現されるが、一方は形式言語に属し他方は日常言語に属するという意味で、概念としての地位（役割）は全く異なることを理解しなければならない。

ここで私は数学者のために幾つかの注意を与える。あなた方数学者は、上に私が「数学者が通常『命題』、『証明』、『証明可能な命題』等々と考える諸概念云々」と述べた表現に抵抗を感ずることと思う。あなた方は数学的な定理、証明などは単に「そのように考えられた」ものではなく、普遍的かつ明証的に「確定した」ものだと考えている（感じている）だろうからである。もちろん私は、あなた方のそうした感じ方が単なる数学者の主観（思い込み）などではないことを承知しているが、しかし反省してみて欲しい。どのような言明（文章）を数学の命題あるいは証明とするかについて、メタレヴェルでの（数学の現場での）厳密な定義が存在するわけでは決してないのである。

*3 これを怠ることが、この定理がとかく難解とされる理由の一つである。

例えばペアノ算術の中の「命題」であれ「出鱈目の（文法に外れた）文章」であれ、それら自体はどちらも単なる有限記号列に過ぎない。どのような記号列が出鱈目ではない「命題」や「証明」となるかは、あなた方が日常行っている数学的実践によってではなく、数学的実践（論理的推論）それ自体をもオブジェクトレヴェルに形式化した上で、メタ数学的に定義されることによって確定するのである。もちろん、あなた方が数学の命題（定理）や証明に対する確かな実感[*4]を持っているのは間違いないし、メタ数学が与えるそれらの定義とは結局のところあなた方の日頃の数学的実践を単に形式的に書き起こしたものにすぎない。しかし現場の数学者による日常の研究での行為（判断）は、定理や証明を構成しているのであって「それらが何であるか」を定義しているのではないし、そうして証明された定理が「数学の定理（証明）である」というそのことを客観的に正当化することもできないのである（単にあなた方のその「実感」に基づく主張を言い張るだけである）。

数学や論理学において、どのような文章を「命題」あるいは「証明」と見なすかは事実判断であり価値判断ではない。そして通常はこうした事柄について数学者たちの判断は常に一致し、問題を生じることもない。しかしメタレヴェルでのこうした事実判断は、もちろん単なる数学者個人の主観ではないものの、数学的命題の論理的当否を判断するような具合に決着をつけることはできないのである。何故なら数学的に見えるある文章を前にした「これは数学の命題（あるいは証明）であるか?」という問いは、それが意味を持つ場合でも数学の問題ではなくメタ数学の問題なのであって、「客観的」という言葉をどのように解釈するにしても、現場の数学者が彼らの専門領域の中で普段行っている実践によって、これらのメタ数学的な問いに対して客観的に答えることはできないからである。実際数学者がそれをしようとすれば、彼/彼女は結局のところ論理学者の行ったことを自ら繰り返す以外にないだろう。つまりメタ数学に訴えるほかはないだろう（場合によってはそのためにメタ数学（論理学）それ自体を発展させる必要も生じるかもしれない）。

数学者にとっての「研究生活」は、政治社会に暮らす市民にとっての（政治的活動を含む）「日常生活」に相当するだろう。こうした日常の暮らしの中では「何が数学的命題と見なされるのか」、あるいは「何が社会正義と見なされるのか」などといった問いについて（メタレヴェルで）客観的に決着を着けることはできないのであって、だからこそメタ数学や原初状態分析が必要とされるのである。それによって我々は、まさにあれらのメタ数学的な問いに対してメタ数学が答えるような仕方で、こうした社会正義の問いに対する、少なくとも道理に適った人々にとっての客観的な答えを得ようとする。我々は通常自身が「（秩序ある）社会」や「正義に適っている」と考える状況、つまり公理 1 及び 2 そして第 1 原理を受け入れている原初状態を設定し、幾つかの鍵となる概念に可能な限り厳密な定義を与えた。その上で、それらの諸概念がこうして設定された原初状態の中で適切に機能する、即ち「第 1 原理が原初状態で当事者たちの基本的権利と見なし得る考えを自然に導き、第 2 原理が効用原理に優越して選択される」こと、さらに「当事者たちは自由の優先性を承認し、この原初状態は反照的均衡の状態にある」ことを確かめた。我々はこれら一連の論証をメタ倫

[*4] あなた方のそうした「実感」が誰にとっても信頼に値するものであるのは言うまでもないことである。本文でも述べたように、私はあなた方がこのようなときに単なる主観的印象を述べているに過ぎない、などと言うつもりはない。しかし今我々がここで問題としているのは、そうしたあなた方の「感じ方（印象）」がどの程度信頼できるか、どのようにして客観化されるのかということではないのである。

理学の諸定理の証明と見なしたのであり、これによって正義の二原理は我々の正義原理となるのであった。繰り返し述べている通り <公正としての正義> におけるこうした議論の手続きが数学基礎論のそれと非常に類似していることに注目して欲しいのである。

補論：不完全性定理の証明の概要

既に述べた通り、ゲーデルの不完全性定理は 1 階算術（ペアノ算術、略して PA）の中に肯定も否定も証明されない命題（いわゆる決定不可能な命題）が存在することを主張する。1 階算術とは（等号を含む）1 階述語論理上の自然数論のことであって、それを説明するには先ず 1 階の述語論理（First Order Predicate Logic）についてきちんと述べておく必要がある。そのためには先ず 1 階の述語論理を記述する言語（それを $\mathcal{L}$ と記す）を定めなければならない。これによって、論理それ自身とその上に定義された自然数論が完全に形式化されるのである。

$\mathcal{L}$ は記号 $\sim$（否定）、$\rightarrow$（ならば）、$\forall$（全ての）、$($、$)$（右括弧と左括弧）などからなる記号体系であって、さらにそれは可算個[*5]の $\kappa_1, \kappa_2 \ldots$（**定項**）と $\xi_1, \xi_2 \ldots$（**変項**）を含むことができるが、有限個の記号で可算無限個の記号を表現するには、$\mathcal{L}$ は定項の記号 κ と変項の記号 ξ 及び記号 $*$ を含むこととし、$\kappa^*, \kappa^{**} \ldots$ によって定項を、$\xi^*, \xi^{**}, \ldots$ によって変項を表すこととすれば良い。但し PA は特別の定項記号 0（ゼロ）を含む。また $\mathcal{L}$ は可算無限個の $\phi_1, \phi_2, \ldots$（n **項演算記号**）、$\rho_1, \rho_2 \ldots$（n **項述語記号**）を含むことができる。定項の時と同様に $\mathcal{L}$ に記号 ϕ と $|$ を含めておいて $\phi^*, \phi^{**}, \ldots$ によって 1 項演算記号を、$\phi|^*, \phi|^{**} \ldots$ によって 2 項演算記号を表す (3 項以上も同様）ことにすれば良い。述語記号についても同様に処理することができる。PA で用いられる述語記号としては特に 2 項述語記号 $=$（等号）と、演算記号としては 1 項演算記号 $'$（後で説明される後者（successor）記号）及び 2 項演算記号 $+$（算術の加法）と $\times$（算術の乗法）がある。従って $\mathcal{L}$ の記号は全部で $\sim$、$\rightarrow$、$\forall$、$($、$)$、0、κ、ξ、$*$、$=$、$'$、$+$、$\times$、ϕ、ρ、$|$ である。一階述語論理とはそれらの記号によって表現され、以下の論理式を**公理**とする論理体系言語である。体系の中での論証（論理演算）は**推論規則**（後述）に従って行われる。論理記号は述語論理という「言語」にとっての言わば「アルファベット」であり、公理と推論規則はその言わば「文法」に相当すると言えようか。

公理の中の P、Q、R、S は**論理式**（formula）を表し、それらは以下のようにきちんと定義されるが、そのために先ず我々は**項**（term）とは何かを定義しなければならない。

(T1)　全ての定項（$\kappa_1, \kappa_2 \ldots$）及び変項（$\xi_1, \xi_2 \ldots$）は項である。

(T2)　もし τ が項ならば τ' も項である。

[*5] 有限集合の要素の個数はそれらを数えれば良いが、無限集合の要素の「個数」はそれらが自然数 $\{1, 2 \ldots\}$ と 1 対 1 の対応がつくときに**可算**個であるという。全ての実数は可算個よりも「多い」ことが知られている（つまり実数と自然数との間に 1 対 1 の対応をつけることはできない）。

(T3)　もし τ_1 と τ_2 が項ならば $\tau_1 + \tau_2$ も項である。
(T4)　もし τ_1 と τ_2 が項ならば $\tau_1 \times \tau_2$ も項である。

(T1) から (T4) に従って生じる記号列が PA における項であるが、これらだけでは PA では単に「算術」しかできない。不完全性定理の本質は PA において（PA の中で）メタ数学そのものを行うことにある。つまり我々がメタレヴェルで構成する（不完全性定理などの）証明を PA で再現したいのである。我々は算術よりも一般的な n 項演算記号 ϕ を許す数論的理論が必要なのであり、そのために次の条件を付け加える。

(T5)　もし $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ が項で ϕ が n 項演算ならば $\phi(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ も項である。

各項は述語論理 $\mathcal{L}$ という言語の「単語」に相当するものと言えるだろう。ここで (T2) に現れる記号 $'$ の意味について注意を与えておく。これは直感的には $\tau' = \tau + 1$ のことである。しかし厳密に言えば、PA の中では $\tau' = \tau + 1$ とは書けず（何故なら 1 という記号は PA に存在しないから)、$\tau' = \tau + 0'$ と書かなければならない（0 は「数字」ではなく単なる記号であることに注意)。そしてこれは後者記号の定義ではなく、公理 P3 と P5（後述）から導かれる定理である。後者記号に限らず全ての論理記号は内在的意味（connotation）を持たず、記号は定義によってではなく公理の中でそれらが果たす役割によって確定する。記号が意味から開放されて、完全にそれらの機能のみによって存在することこそが記号論理学の意義なのである。そしてここでもう既にメタ・オブジェクトレヴェルの区別について注意する必要がある。諸君の中には、(T2) の中に τ という $\mathcal{L}$ の中に含まれない記号が出てきたことを不審に思う人がいるかもしれない。また例えば (T1) の中の $\kappa_1,\ \kappa_2$ などは厳密には κ^*, κ^{**} のように書かれるべきではないかと考える人もいるかもしれないが、(T1)〜(T5) の定義は述語論理についてメタレヴェルで述べられているのであり、それら自身は述語論理の中の（オブジェクトレヴェルの）命題ではないことに注意せよ。その際に $\kappa_1,\ \kappa_2$ などは一般の定項について言及しているのであるが、これに対して κ^*, κ^{**} はそれぞれ PA の中の特定の定項記号なのである。同様の注意は以下に示される論理式の定義にも当てはまる。

　次に論理式とは次のように定義される記号列のことである（各論理式は述語論理の「文章」と呼べようか)。

(F1)　τ_1 と τ_2 が項のとき $\tau_1 = \tau_2$ は論理式である。
(F2)　P、Q が論理式ならば $P \to Q$ は論理式である。
(F3)　論理式 P に対して $\sim P$ は論理式である。
(F4)　もし P が論理式で ξ が変項ならば $\forall \xi P$ は論理式である。
(F5)　もし $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ が項で ρ が n 項述語ならば $\rho(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ は論理式である。

(F1) で定義された論理式を**原子論理式**（atomic formula）と呼ぶ。(F2) によって定義された論理式 $P \to Q$ は「P（が成り立つ）ならば Q（が成り立つ)」を、(F3) によって定義された論理式 $\sim P$ は「P でない（成り立たない)」をそれぞれ意味する。また (F4) から生じた論理式 $\forall \xi P$ は「全ての ξ に対して P が成り立つ」を意味し、論理式 P は必ずしも ξ を含まなくとも良い（そ

のときには $\forall\xi P$ は P と同じ意味である)。そして (F1) から (F4) に従って生じた記号列のみがPA の論理式である。(F5) の必要性は (T5) の場合と同様である。これらの定義によって我々は、初めてどのような記号列を「論理式」と呼ぶかを確定したわけである。この定義以前に我々の眼の前に存在していたのは単なる勝手な記号の「並び」だけであり、何が「式」なのかは全く不明確であったことに注意せよ。以下ではときに項と論理式を合わせて**広義の論理式**と称することがある。

ここで後の便宜のために P, Q を論理式として、$P \vee Q$（P または Q）を $\sim P \to Q$ によって定義する。また $P \wedge Q$（P かつ Q）を $\sim (P \to \sim Q)$ で、$P \leftrightarrow Q$（P と Q は同値）を $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ によって、また $\exists\xi P$（ある ξ について P が成立する）を $\sim (\forall\xi \sim P)$ によって定義する*6。これらの記号は便宜的な略号であって、PA の正式の記号ではなく、従って（厳密な意味での）形式的証明の中に現れることはない。

変項 ξ が命題 P の中で**束縛されている**とは、ξ が量化記号 $\forall$ を伴って（つまり $\forall\xi$ の形で）P の中に現れることを言う。束縛されていない変項を**自由である**（**自由変項**である）と言う。自由変項を含まない論理式を**文章**（statement）と呼ぶ。

τ を変項または項とする。自由変項 ξ を含む論理式 P において、ξ を τ に置き換えて得られる論理式を $P(\tau|\xi)$ と書くことにする。自由変項 ξ を含む論理式 P が変項 ζ を ξ に対して**許容する**（admits ζ for ξ）とは、$P(\zeta|\xi)$ において ζ が束縛変項とならないことを言う。また τ を項とするとき、P が τ の含む全ての変項を P における自由変項 ξ に対して許容するとき、P は τ を ξ に対して許容すると言う。どのような定項も決して量化されず、つまり束縛されることはないから、どのような論理式 P もそれの含む自由変項 ξ に対して任意の定項 κ を許容することを注意しておく。

以下の L1〜L6 が述語論理の公理である。但し、L1〜L6（及び下記の AxGen）は一つ一つの論理式 P、Q、S に対して 1 個の公理を定めるので、正確には単なる公理ではなく、**公理図式**である。

述語論理の公理: 以下では P, Q, S を任意の論理式、τ, ξ を任意の変項とする。

L1　$P \to (Q \to P)$

L2　$(S \to (P \to Q)) \to ((S \to P) \to (S \to Q))$

L3　$(\sim Q \to \sim P) \to (P \to Q)$

L4　$\forall\xi(P \to Q). \to .\forall\xi P \to \forall\xi Q$

L5　$\forall\xi P \to P(\tau|\xi)$（但し P は ξ に対して τ を許容するとする）

L6　$P \to \forall\xi P$（但し P は ξ を自由変項として含まないとする）

括弧を省略するために公理 L1 を $P \to . \, Q \to P$ と書くことがある。同様に公理 L2 を $S \to .P \to Q :\to: S \to P. \to .S \to Q$ のように書き、また公理 L3 を $\sim Q \to \sim P. \to .P \to Q$ と書くことがある。これらから公理 L4 の（括弧を省略した）書き方の意味は明らかだろう。さらに述語論理の公理を定める次の規則を付け加える。

*6 これらの論理記号が何故このように定義されるのかを知らない人は、[7] などの論理学の入門書を参照して欲しい。

AxGen　P が L1〜L6 の公理図式のいずれかで、かつ ξ を自由変項として含むならば $\forall\xi P$ もまた公理である。

例えば L1 は、命題 P が成立しているならば、「Q ならば P」という命題が成り立つと主張しているが、これは当たり前である（「Q ならば P」は「Q でないかまたは P」を意味したから）。L5 を除くそれ以外の公理も（少し考えれば）当然のものとして受け入れられるだろうが、もしそうでないならばこれらの公理は天下り的に「与えられたものとして」受け入れてもらいたい（詳しくは [7] などを参照して欲しい）。ここでは、L5 について但し書きの意味を注意しておく。論理式 $\forall\xi \sim \forall\zeta(\xi=\zeta)$ を考えよ。この論理式は明らかに真であるが、P として $\sim \forall\zeta(\xi=\zeta)$ を取ると、P は ξ に対して ζ を許容しない。そして実際 $P(\zeta|\xi)$ 即ち $\sim \forall\zeta(\zeta=\zeta)$ は明らかに偽であり、従ってこれに L5 を適用した結果つまり、$\forall\xi P \to P(\zeta|\xi)$ もまた偽である。

述語論理には唯一つの推論規則（３段論法、Modus Ponens）が存在する。

ModPon　任意の論理式 P, Q に対して $P \to Q$ と P から Q が導出される。

ここに言う「導出される」の意味については後できちんと説明するが、ModPon はしばしば記号 $\vdash$ を用いて $P \to Q,\ P \vdash Q$ のように書かれる（記号 $\vdash$ は「導出される」を意味する）。これに加えて、ゲーデルの定理の証明のためには「等号を加えた述語論理」を考える必要がある。それは 2-項述語記号 $=$（等号）を含み、一般には全ての n 項述語記号及び n 項演算記号と $=$ の関係を定める公理が与えられるのであるが、PA に含まれる演算記号としては 1 項演算記号 $'$ 及び 2 項演算記号 $+$ と $\times$、また述語記号として 1 項述語記号 $=$ を思い出しておく。従って PA に対しては以下の公理が加えられる。

等号の公理:　以下では $\xi, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ は任意の変項を表す。

E1　$\forall\xi(\xi=\xi)$

E2　$\forall\xi\forall\eta(\xi=\eta \to \xi'=\eta')$

E3　$\forall\xi_1\forall\xi_2\forall\eta_1\forall\eta_2(\xi_1=\eta_1 \wedge \xi_2=\eta_2 \to \xi_1+\xi_2=\eta_1+\eta_2)$

E4　$\forall\xi_1\forall\xi_2\forall\eta_1\forall\eta_2(\xi_1=\eta_1 \wedge \xi_2=\eta_2 \to \xi_1\times\xi_2=\eta_1\times\eta_2)$

「等しい」という言葉の意味からしても全ての公理は当たり前であるが、前にも述べた通り記号 $=$ はそれ自身の「意味」を持たず、その満たすべき条件は全て公理としてきちんと与えておかなければならないのである。さらに我々の体系は n 項演算記号 ϕ と n 項述語記号 ρ を含むので次の二つの公理を加えなければならない。

E5　$\forall\xi_1\ldots\forall\xi_n\forall\eta_1\ldots\forall\eta_n(\xi_1=\eta_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n=\eta_n \to \phi(\xi_1\ldots\xi_n)=\phi(\eta_1\ldots\eta_n)$

E6　$\forall\xi_1\ldots\forall\xi_n\forall\eta_1\ldots\forall\eta_n(\xi_1=\eta_1 \wedge \ldots \wedge \xi_n=\eta_n\ .\to .\ \rho(\xi_1\ldots\xi_n) \leftrightarrow \rho(\eta_1\ldots\eta_n)$

ペアノ算術は以上の公理に加えてさらに以下の 7 個の公理（P7 は公理図式）によって完結する。

PA の公理:　以下では ξ, η は任意の変項を表す。

P1　$\forall\xi(\sim\xi'=0)$

P2　$\forall\xi\forall\eta(\xi' = \eta' \to \xi = \eta)$

P3　$\forall\xi(\xi + 0 = \xi)$

P4　$\forall\xi(\xi\times 0 = 0)$

P5　$\forall\xi\forall\eta(\xi + \eta' = (\xi + \eta)')$

P6　$\forall\xi\forall\eta(\xi\times\eta' = \xi\times\eta + \xi)$

P7　ξ を自由変項として含む論理式 P に対して

　　$P(0|\xi) \land \forall\xi(P(\xi) \to P(\xi'))\ .\to .\ \forall\xi P(\xi)$

変項に自然数を代入してみれば、全ての公理を納得することができるだろう（P7 は数学的帰納法である)。さて等号を含む述語論理、即ち L1〜L6 + AxGen + E1〜E6 までの 13 個の公理系に推論規則 ModPon を加えた形式体系は、ペアノ算術 PA の様々な命題を証明するための論理の体系であり、算術（初等数論）に限らず全ての数学を行うに際して、数学者たちが当然のものとして用いている彼らの「言語」である。ペアノ算術とは述語論理に P1 から P7 の七つの公理を加えてでき上がった公理体系に他ならない。述語論理においてはまたそれ自身の中で様々な定理が成立し、そうした定理についての陳述を行うメタ定理が成立するが、そうした諸定理が即ち「論理法則」である。幾つかの例を挙げると、任意の論理式 P, Q, R に対する

定理 L1:　$\vdash (P \to P)$

定理 L2:　$P \to Q,\ Q \to R,\ P \vdash R$

などである。定理 L1 は括弧を用いないで $\vdash P \to P.$ とも書くことができて、「論理式 $P \to P$ が述語論理の公理から導出される」ことを主張している。これはどこから見ても当たり前と思われる「定理」であるが、定理とメタ定理の区別を説明するために挙げた。つまり論理式 $P \to P$ は述語論理の定理であり、定理 L1 は「この定理が成立する」ことを主張するメタ定理なのである。また定理 L2 は「3 個の論理式 $P \to Q$、$Q \to R$ と P から 論理式 R が導出される」ことを主張しており、これもまた直感的には当たり前であろう。しかしいずれにしても論理学ではこうした一見自明な命題（論理式）さえ何一つ前提とされてはならず、全てが公理系から導出されなければならない。そこである論理式が「導出される」とはいかなることかをきちんと定義しよう。

いま $\Delta = \{P_1 \ldots P_n\}$ を有限個（n 個）の論理式の集合とする（Δ を**仮定**と呼ぶ)。論理式 Q が Δ から**導出される**とは、有限個の論理式の列 $S_1 \ldots S_n$ が存在して $S_n = Q$ であり、$1 \leq i < n$ について、S_i は公理であるか、$S_i \in \Delta$ であるか、$j, k < i$ なる j, k に対して S_k は $S_j \to S_i$ の形の論理式である（これはもちろん ModPon による導出を意味する）か、のいずれかであるときを言う。このとき我々は $\Delta \vdash Q$ と書く（従って ModPon は正式には $\{P \to Q, P\} \vdash Q$ と書くべきである)。系列 $S_1 \ldots S_n (= Q)$ を Q の （仮定 Δ からの）**証明列**と呼ぶ（各々の S_i は証明の各ステップである)。証明列が存在するとき Q は**証明可能**なのである。$\Delta = \emptyset$（空集合）のとき、つまり Q が公理からのみ導出されるとき、Q は**定理**と呼ばれる。

このようにして全ての導出のステップを書き上げる証明は**形式的証明**（formal proof）と呼ばれる。しかし一般に述語論理のメタ定理の証明を全てこのように完全に形式的に遂行することは可能

ではあっても現実的ではない。そのようにすると、多くの定理の証明は余りにも冗長なものとなってしまい、機械（AI）ならばともかく、人間には事実上追えなくなってしまうからである。そこで人間の直観には明らかなステップは適度に省略して定理を述べたり証明したりすることが通常行われる。ところで先ほど項や論理式の定義あるいは公理の中で $\mathcal{L}$ に含まれない記号が用いられた。以下では証明の中でも、例えば公理 P5 などで用いられた η のような PA に存在しないはずの記号を便宜的に使うこともある。これらは本来はきちんと ξ^* などと書くべきところだが、しかし $*$ は有限個の記号で可算無限個の記号の区別をつけるための単なる技術的工夫に過ぎず、従って論証を見易くするためにこうした簡略化した書き方をしばしば行うのである*7。このように論証を適度に省略したり、記号を自由に用いる証明は**作業上の証明**（working proof）と呼ばれる。それはたとえ形式的ではなくても厳密性において形式的証明に劣るものではない。作業上の証明は人間にとっての便宜のために行われもので、論理の本質とは関係がないからである。事実どのような数学のいかなる厳密な証明と言えども、論理学の立場から見れば全て working proof である。ところでロッサーが先に引用した文章の中で述べていたことだが、もしメタ論理学において「通常の言語」を証明の遂行のために用いたならば、それは作業上の証明である。後で見る通り、ゲーデルは彼の第 1 不完全性定理に対して作業上の証明を与えた後、その証明（の一部分）が形式的証明に書き換えられることを認めた上で第 2 不完全性定理を証明した。そのような作業上の証明から形式的証明への書き換えが現実に可能であることを自ら納得するためには、少なくとも最低限度の論理演算の経験が必要である。そのために定理 L1 と L2 の形式的証明を与えよう。

定理 L1 の証明:

(1) $P \to: P \to P. \to P. :\to: .P \to .P \to P :\to: P \to P$ （公理 L2）
(2) $P \to: P \to P. \to .P$（公理 L1）
(3) $P \to .P \to P :\to: P \to P$（ModPon, (1), (2)）
(4) $P \to .P \to P$（公理 L1）
(5) $P \to P$（ModPon, (3), (4)）

式番号と括弧の中の指示は便宜のためにつけたもので、本来の形式的証明には存在しない。ステップ (1) は公理 L2 を適用するのだが、先ずその公理を

$$S \to .P \to Q :\to: S \to P. \to .S \to Q$$

と書いておいて、 S と Q のそれぞれに P を、公理の P に $P \to P$ を代入する。最後の $P \to P$ の代入は、正確には 3 個の記号で一つの論理式を表すために $P \to P.$ とドットをつけて行う。それに伴って公理 L2 のドットとコロンにはそれぞれ一つづつドットが追加される。同様にステップ (2) では公理 L1 の P はそのままで Q に対して $P \to P.$ を代入する。こうして得られたステップ (1) とステップ (2) に推論規則 ModPon を適用してステップ (3) へ進む。ステップ (4) では公

*7 従って厳密に言えば、全ての公理（L1～L6 + AxGen + E1～E4）は本来は完全に形式的な仕方で述べられるべきである。しかし実際には通常の論理学の教科書においてすらこうした作業上の書き方がしばしば行われる。これは（特にこの補論のような）入門レヴェルの解説の場合は已むを得ないことであろう。

理 L1 の Q に P を代入し、これとステップ (3) からやはり推論規則を適用して証明すべき定理 $P \to P$ が得られた。全てのステップが先に定義された導出の手続きに則っていること、同時にこれほど当たり前の命題を示すのにこれほどの手間が必要であることを自分で確かめて欲しい。この定理の形式的証明をわざわざ挙げた理由は、ゲーデルの定理を理解するのために最低限度必要な論理学さえも、こうした面倒な確認を自ら行うことによってしか身に着かないからである。定理 L2 も同じようにして証明される（幸いにも少し易しい)。

定理 L2 の証明:

(1) $P \to Q$ （仮定）
(2) $Q \to R$（仮定）
(3) P（仮定）
(4) Q（ModPon, (1),(3)）
(5) R（ModPon, (2), (4)）

この定理は 3 個の仮定 $\Delta = \{P \to Q, Q \to R, P\}$ から R を導出する、というものである。初めの 3 個のステップでそれらの仮定を順に並べ、推論規則を 2 度用いて定理が証明される。この証明もまた上に定義された導出プロセスの（ごく易しい）実例の一つに過ぎない。次の定理は working proof に訴えれば比較的簡単に証明される。

定理 L3： もし $\Delta \vdash \forall\xi P$ でかつ P が ξ に対して τ を許容するならば、$\Delta \vdash P(\tau|\xi)$ である。
証明: いま $\Delta \vdash \forall\xi P$ でかつ P が ξ に対して τ を許容すると仮定する。ここで $\Delta \vdash \forall\xi P$ と公理 L5 ; $\forall\xi P \to P(\tau|\xi)$ に対して推論規則 ModPon を適用すれば $\Delta \vdash P(\tau|\xi)$ を得る。Q.E.D.

次のメタ定理は非常に基本的かつ応用上重要であり、我々は後でこれを定理 L3 とともに 1+1=2 の形式的証明に用いるが、その証明には working proof としても数学的帰納法を用いなければならず、少々長いものなので [7, p.106]、省略する。

定理 L4: $\vdash \theta = \eta \to \tau = \tau_{\theta\to\eta}$、但し θ、η、τ、$\tau_{\theta\to\eta}$ は全て項であり、τ は θ を含み、さらに $\tau_{\theta\to\eta}$ は τ の中に出現する θ （全てでなくとも良い）を η で置き換えて得られた結果である。

定理 L3 と L4 は、定理の言明それ自体が作業上の仕方で述べられていることに注意せよ。これらもまた直感的には当然であるにもかかわらず、もし定理を形式的に述べるとなるとそれは非常に長くまた手間のかかるものとなるだろう。さて以下では PA において形式的証明がどのようにして行われるかを、できる限り簡単な計算 $1 + 1 = 2$ について見てみよう。普通 $1 + 1 = 2$ を「定理」と呼ぶ人は無かろうが、PA ではこれは $0' + 0' = 0''$ を意味し、立派な定理である。

定理: $0' + 0' = 0''$
証明: (1) $\forall\xi(\xi + 0 = \xi)$ （公理 P3）
(2) $0' + 0 = 0'$（定理 L3 を適用）

(3) $\forall\xi\forall\eta(\xi+\eta'=(\xi+\eta)')$ （公理 P5）

(4) $\forall\eta(0'+\eta'=(0'+\eta)'$（定理 L3 を適用）

(5) $0'+0'=(0'+0)'$（定理 L3 を適用）

(6) $0'+0'=0''$ （定理 L4 を適用）

ステップ (2) では $\xi+0=\xi$ を P とおき、$\tau=0'$ として定理 L3 を適用した。ステップ (4) では $\forall\eta(\xi+\eta'=(\xi+\eta)')$ を P と置き $\tau=0'$ として定理 L3 を適用した。同様にステップ (5) では $\forall\eta(0'+\eta'=(0'+\eta)')$ に対して $\tau=0$ として定理 L3 を適用し、最後のステップ (6) ではステップ (2) と (5) に定理 L4 を適用して定理の証明を終わる。日常では暗算で難なく行える簡単な計算が、形式体系の中ではこれほどの労力を要するのである。なるほど $1+1=2$ は確かに定理である! この証明は二つのメタ定理を援用しているためにわずか (!) 6 行で済んでいるが、そのためこの証明は完全な形式的証明とは言えない。もしこれを完全に形式的に行おうとすれば、それらのメタ定理の形式的証明を省略しないで全て書き加えなければならない。$1+1=2$ という「定理」の論理学的に完全な証明とはどれほど手間のかかる仕事であるかが思いやられるであろう。

ところでこうした定理とそれらの証明を見て諸君は何を感じただろうか? 論理的推論とは明確な規則（公理と 3 段論法）に従って記号列を変形していくプロセスである。そうした手続きをアルゴリズムと呼ぶが、それは数の計算にもまた共通している。実際述語論理の定理 L1 と定理 L2 は上の PA における定理 $1+1=2$ と全く同じ仕方で形式的に証明された。これは即ち、論理的推論と算術とは結局のところ同じ操作を行っているということではないか? 実際その通りであることをゲーデルは示した。彼は後で説明する**帰納的関数**と呼ばれる数論的関数（任意の自然数を別の自然数へと変形する規則）を用いて、全ての論理的操作が数の計算として再現されることを証明した。つまり一般に形式体系の中で述べられる定理とその証明は、ごく日常的な意味での算術（数計算）と本質的に同じものであることに彼は気付いたのであった。しかし不完全性定理を得るには、この素朴な観察から次に述べる深い洞察に進まなければならない。即ち論理演算と算術計算との平行関係によって、ある命題が「証明可能である」といったメタ数学的概念はある帰納的関数に対する数学的条件として表現され、PA において「然々の命題が証明できるか」などのメタ数学的問題は、自然数に関する（普通の意味での）数学的問題に翻訳される、という洞察である。最終的に不完全性定理の証明は例の「嘘つきのパラドックス」に類比的なアイディアに訴えて行われるのだが、以上から分かるように、それには帰納的関数というごく初等的な手段しか用いられない。ゲーデルは「(自然) 数の計算」という全ての人の目の前にある事柄の深い意味を発見したのであり、不完全性定理とは数学的であると同時に哲学的な性格を持つ定理なのである。

そこで決定不可能命題 G を構成するために用いられる一つの数学的概念として帰納的関数（関係）を紹介しよう。これは通常の意味での数学（技術）的概念であって、メタ数学的概念ではない（PA の中に登場するのではない[*8]）。ところで英語では関数の「変数」も論理式の「変項」も

[*8] これは不完全性定理の証明において帰納的関数がメタレヴェルで用いられることを言っているのであって、後で紹介する補助定理 G2 によればメタレヴェルで構成可能な全ての帰納的概念は PA で再現できるのだから、帰納的関数に相当する概念は PA の中にもちろん存在する。

variable であるが、私は日本語に（幸運にも）二つの単語が存在することを利用して、メタレヴェルでの variable を「変数」と呼ぶことにする。それに伴って、PA での「変項」をギリシャ文字のアルファベット ξ、η 等で表してきたが、メタレヴェルでの「変数」はローマ字のアルファベット x、y 等で表すことにする。（一般に複数個の）自然数にある自然数を対応させる関数は**数論的関数**と呼ばれる。

定義 G1： 数論的関数 $f(x_1 \ldots x_m)$ と数論的関数 $g_1(x_1 \ldots x_n) \ldots g_m(x_1 \ldots x_n)$ の**合成**とは $f(g_1(x_1 \ldots x_n) \ldots g_m(x_1 \ldots x_n))$ を意味する[*9]。また数論的関数 $f(x_1 \ldots x_n)$ が別の二つの数論的関数 $g(x_1 \ldots x_{n-1})$ と $h(x_1 \ldots x_{n+1})$ から**帰納的に**（recursively）定義されるとは、任意の $x_2 \ldots x_n, k$ に対して次の二つの条件

$$f(0, x_2 \ldots x_n) = g(x_2 \ldots x_n),$$
$$f(k+1, x_2 \ldots x_n) = h(k, f(k, x_2 \ldots x_n), x_2 \ldots x_n)$$

が成り立つことである。

例えば足し算 $f_+(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ は、$g_+(x_1) = x_1$ と $h_+(x_1, x_2, x_3) = x_2 + 1$ から、

$$f_+(0, x_2) = g_+(x_2),$$
$$f_+(k+1, x_2) = k + 1 + x_2 = k + x_2 + 1 = h_+(k, f_+(k, x_2), x_2)$$

となるので帰納的であり、掛け算 $f_\times(x_1, x_2) = x_1 x_2$ もまた $g_\times(x_2) = 0$ と $h_\times(x_1, x_2, x_3) = x_2 + x_3$ を用いて、

$$f_\times(0, x_2) = 0x_2 = g_\times(x_2),$$
$$f_\times(k+1, x_2) = (k+1)x_2 = kx_2 + x_2 = h_\times(k, f_\times(k, x_2), x_2)$$

によって帰納的に定義できることが分かる。同様に関数 x^y や $x! = x(x-1) \ldots 1$ もまた帰納的であることが容易に分かる。

定義 G2： 数論的関数 f が**帰納的**[*10]であるとは、数論的関数の有限列 $f_1 \ldots f_N$ が存在して、$f_N = f$ であり、各 f_j は定数であるか、関数 $x + 1$ であるか、射影関数 $\iota_j(x_1 \ldots x_n) = x_j$ $(1 \leq j \leq n)$ であるか、自分よりも（インデックス j に関して）前の関数との合成、若しくは前の二つの関数から帰納的に定義されることである。

定義 G3： n 個の自然数の間の関係（**数論的関係**と呼ばれる）$r(x_1 \ldots x_n)$ が**帰納的**であるとは、帰納的関数 $f(x_1 \ldots x_n)$ が存在して、関係 $r(x_1 \ldots x_n)$ が成り立つのは $f(x_1 \ldots x_n) = 0$ となる時かつその時に限ることを言う。

帰納的関数、帰納的関係に関して次の補助定理が成り立つ。これは数学の定理であって、論理学のメタ定理ではない。従って、余りにも煩雑になることを避けるために補助定理 G1 の中で PA と同

[*9] つまり単なる代入に過ぎない。ここで各 g_i は変数 $x_1 \ldots x_n$ の全てを含まなくとも良い。例えば $f(x, y) = f(g_1(x), g_2(x, y))$ などでも良い。これは帰納的の定義における関数 g 及び h についても同様である。

[*10] 現在ではこれは**原始帰納的**（primitive recursive）と呼ばれている。

じ論理記号 $\sim$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$ 等を用いているが、これらはメタレヴェルでの（通常の数学の）記号として用いられている（もちろんそれぞれ順に「でない（not)」、「全ての（for all)」、「ある（for some)」、「かつ（and)」、「または（or)」を表す)。

補助定理 G1： 以下で r と s は帰納的関係を表し、f と g は帰納的関数を表すものとする。この時次の命題が成り立つ。

(I) 関係 $\sim r$, $r \wedge s$, $r \vee s$, $r \to s$, $r \leftrightarrow s$ は全て帰納的である。

(II) $f(x_1 \dots x_m) = g(y_1 \dots y_n)$, $f(x_1 \dots x_m) \leq g(y_1 \dots y_n)$, $f(x_1 \dots x_m) < g(y_1 \dots y_n)$ は全て $m+n$ 個の変数 $(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$ に関する帰納的関係である。

(III) $\exists x(x \leq f(x_1 \dots x_m) \wedge r(x, y_1 \dots y_n))$ 及び $\forall x(x \leq f(x_1 \dots x_m) \to r(x, y_1 \dots y_n))$ は 変数 $(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$ に関する帰納的関係である。また $\epsilon(x)(x \leq f(x_1 \dots x_m) \wedge r(x, y_1 \dots y_n))$ は 変数 $(x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$ を持つ帰納的関数である。但し $\epsilon(x)h(x)$ は $h(x)$ が成り立つ最小の x を表し、もしそのような x が存在しなければ 0 と定義する。

証明： 証明はいずれも難しくはないがここでは省略する。[4, 5, 6, 12] のいずれかを参照せよ。Q.E.D.

補助定理 G1 はメタレヴェルでの数論的関数について成立する命題であり、従ってメタ定理ではなく（普通の数学の）定理である。命題 (I) は帰納的関係が $\sim$、$\wedge$、$\vee$ などの論理的操作に関して「閉じている」ことを示している。また命題 (II) によって等号関係 $x = y$ や順序関係 $x \leq y$、$x < y$ が帰納的であることが分かる。ところで帰納的関係が量化記号に対しても閉じている（$r(x, x_1 \dots x_m)$ が帰納的ならば $\exists x r(x, x_1 \dots x_m)$ も帰納的となる）のであれば申し分ないだろうが実はそうはならないのであり、後で示される「決定不可能命題」がまさにそうした（帰納的とならない）例である。しかし x の動く範囲が帰納的関数で上から制限されているならば、帰納的関係は量化記号に関しても閉じている。それが命題 (III) である。

メタレヴェルの論理（つまり普通の数学）とオブジェクトレヴェルの形式体系との間の橋渡しは次のように行われる。先ず述語論理とペアノ算術に登場した諸記号と自然数との間に次のような対応関係を定める。

0	$\sim$	$\to$	$\forall$	$($	$)$	κ	ξ	*	$=$	$'$	$+$	$\times$	ϕ	ρ	$\vert$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

記号と自然数の対応のさせ方は（ 1 対 1 になりさえすれば）自由である。一般には自然数に 0 を含めるが、番号付けは 1 から始めなくてはならない。0 を用いると、任意の（素）数 p に対して $p^0 = 1$ なので、後に述べるゲーデル数が記号列と 1 対 1 に対応しなくなる。この規則によって、PA の記号と自然数との間に 1 対 1 の対応がついた。さらに、今 p_k を大きさの順に k 番目の素数として、自然数の有限列 $n_1, n_2 \dots n_k$ に自然数 $2^{n_1} \times 3^{n_2} \times \dots \times p_k^{n_k}$ を対応させると、PA の全ての記号列にある確定した自然数（ゲーデル数と呼ばれる）が対応することになる。注意すべきことは、PA の中に「自然数（の数字による表現、$0, 1, 2 \dots$)」は存在せず、それらは概念として（記号列として）存在するということである。例えばメタレヴェルでの（つまり普通の）自然数 3 は PA

では $0'''$ として存在し、それを再び上記の規則に従ってメタレヴェルに引き戻すと $2^1 3^{11} 5^{11} 7^{11}$ という（極めて大きな!）自然数に対応する。論理式とは記号の列であり、各記号はこのようにして 1 から 16 までの自然数と 1 対 1 に対応しているから、各論理式はそれら自体がこのようにして何らかの自然数と 1 対 1 に対応する。そして証明とは論理式の列であるから、これらもまた同様な仕方で自然数と 1 対 1 に対応させせることができるのである。諸君は上に紹介した $1+1=2$ の証明のゲーデル数を求めてみよ（η は ξ^* とした上で素数表を用いよ）。こうして PA の証明やその各ステップも自然数（ゲーデル数）で表される。以下で示す通り、帰納的関数（関係）はこうした自然数列が（出鱈目にではなく）PA の「証明として」現れる様子をメタレヴェルで再現するのである。同時にそれによって PA の「公理」、「論理式」、「証明」、「証明可能な論理式」といったメタ数学的概念が帰納的関数・関係によって、普通の数学の概念としてメタレヴェルで表現される。その方法は機械的かつ容易であるが、ゲーデル [4] はラッセル・ホワイトヘッドの『プリンキピア・マテマティカ』の論理体系に基づく証明を与えたために非常に長いステップを要した。我々は現代の整理された述語論理の公理に従って定理を述べているのでかなり短くはなったが、しかしそれでもやや複雑である。これまでと同様に、証明の本質に関係しない余りにも煩雑な技術的詳細の解説及び幾つかの補題の証明は参考書に委ねることにして、以下ではポイントだけを説明する。しかしこの解説によって不完全性定理の証明のアイディアは十分に明らかとなるはずである。諸君は以下に定義される様々な関数・関係が補助定理 G1 によって帰納的となることに気づくだろう（$\epsilon(y)$ の定義は補助定理 G1(III) を見よ）。但し煩雑を避けるために補助定理 G1 に引き続いて、以下の様々な関数・関係の定義において PA と同一の論理記号 $\forall$、$\exists$、$\wedge$ 等を用いるが、これらの概念は全てメタレヴェルのものであることを忘れないように。従って $\leq$ や $\neq$ など、PA に含まれない普通の数学記号が通常の意味で使われる。また変数 x、y、z 等はもちろん PA の変項ではなく、PA の記号列を表す（自然数の範囲を走る）変数である。$n!$ は n の階乗（$= n(n-1)\ldots 1$）を表し、$\equiv$ は「左辺の記号を右辺の式で定義する」の意味である。それぞれの定義の最後にそれらの意味を括弧書きで記す。

$x|y \equiv \exists z[z \leq y \ \wedge \ (y = xz)]$（$x$ は y の約数）

$Prime(x) \equiv x > 1 \wedge \sim (\exists z)[z \leq x \ \wedge \ (z \neq 1) \ \wedge \ (z \neq x) \ \wedge \ z|x]$（$x$ は素数）

$Pr(0) \equiv 0, Pr(n+1) \equiv \epsilon(y)[y \leq Pr(n)! + 1 \ \wedge \ Prime(y) \ \wedge \ (y > \mathrm{Pr}(n))]$

（$Pr(n)$ は（大きさの順で）n 番目の素数）

$Pw(n,x) \equiv \epsilon(y)[y \leq x \ \wedge Pr(n)^y | x \wedge \ \sim (\mathrm{Pr}(n)^{y+1}|x)]$

（$x = 2^{k_1}3^{k_2}\ldots {p_n}^{k_n}\ldots {p_\ell}^{k_\ell}$ に対して $Pw(n,x) = k_n$）

$L(x) \equiv \epsilon(y)[y \leq x \ \wedge \ (Pw(y+1,x) = 0)]$（$x = 2^{k_1}3^{k_2}\ldots {p_\ell}^{k_\ell}$ に対して $L(x) = \ell$）

$x\&y \equiv \epsilon(z)\big[z \leq Pr(L(x)+L(y))^{x+y} \wedge \forall n(n \leq L(x) \to Pw(n,z) = Pw(n,x))$

$\wedge \ \forall n(0 < n \leq L(y) \to Pw(n+L(x),z) = Pw(n,y))\big]$

$(x = 2^{k_1}3^{k_2}\ldots {p_r}^{k_r}$ と $y = 2^{\ell_1}3^{\ell_2}\ldots {p_s}^{\ell_s}$ に対して $x\&y = 2^{k_1}3^{k_2}\ldots {p_r}^{k_r}{p_{r+1}}^{\ell_1}\ldots p_{r+s}^{\ell_s})$

$Pr(n)$ の定義において累積帰納法と呼ばれる一種の数学的帰納法が用いられている（$Pr(n+1)$ の定義の中に $Pr(n)$ の価が現れる）。こうした帰納法を用いて定義された関係が定義 G3 の意味

で帰納的となることを証明できる（[6, 12] などを参照せよ）。最後の関係 & によって、PA の記号を様々に組み合わせることが帰納的に表現される。例えば x が論理式 P のゲーデル数のとき $paren(x) \equiv 2^5\&x\&2^6$ は (P) のゲーデル数であり、$Not(x) \equiv 2^2\&x$ は $\sim P$ のゲーデル数である。また y が論理式 Q のゲーデル数ならば $Imp(x,y) \equiv x\&2^3\&y$ は $P \to Q$ のゲーデル数を表し、u が変項 ξ を表すゲーデル数ならば、$Gen(u,x) \equiv 2^4\&u\&x$ は $\forall\xi P$ のゲーデル数である。また次のように定義される帰納的関係

$$const(x) \equiv (Pw(1,x) = 7) \wedge \forall n(1 < n \leq L(x) \to Pw(n,x) = 9)$$

は「x は定項のゲーデル数である」ことを意味する。$var(x)$（x は変項のゲーデル数である）も同様に定義される（各人で試みよ）。これらを用いて「x は項のゲーデル数である」を表す $Term(x)$ を次のように定義する。先ず与えられた自然数 n に対して

$$\begin{aligned}&Fnc(n,y) \equiv (0 < n \leq L(y)) \wedge (Pw(1,y) = 14) \wedge \forall k(1 < k \leq n \to Pw(k,y) = 16)\\&\wedge \forall k(n < k \leq L(y) \to Pw(k,y) = 9)\end{aligned}$$

(y は n 項演算記号記号 $\phi|\ldots|^*\ldots^*$ のゲーデル数、ここで $|$ の個数は $n-1$）

を定義した上で、定義 (T1)〜(T5) を形式的に書き起こす形で

$$\begin{aligned}Term(x) \equiv\, &const(x) \vee var(x) \vee \exists y[(y < x) \wedge Term(y) \wedge (x = y\&2^{11})]\\&\vee \exists y,z[(y,z < x) \wedge Term(y) \wedge Term(z) \wedge (x = y\&2^{12}\&z)]\\&\vee \exists y,z[(y,z < x) \wedge Term(y) \wedge Term(z) \wedge (x = y\&2^{13}\&z)]\\&\vee \exists n[n < L(x) \wedge \exists y,z_1\ldots z_n\{(y,z_1\ldots z_n < x)\\&\wedge x = y\&paren(z_1\&\ldots\&z_n) \wedge Fnc(n,y) \wedge Term(z_1) \wedge \cdots \wedge Term(z_n)\}]\end{aligned}$$

と定義する。ここでも累積帰納法が用いられている（$Term(x)$ の定義の中に x より小なる y,z,z_i に対する $Term(\cdot)$ の価が現れる）。また「x は論理式のゲーデル数である」ことを表現する帰納的関係 $Form(x)$ も同様に、先ず与えられた自然数 n に対して

$$\begin{aligned}&Rel(n,y) \equiv (0 < n \leq L(y)) \wedge (Pw(1,y) = 15) \wedge \forall k(1 < k \leq n \to Pw(k,y) = 16)\\&\wedge \forall k(n < k \leq L(y) \to Pw(k,y) = 9)]\end{aligned}$$

(y は n 項述語記号 $\rho|\ldots|^*\ldots^*$ のゲーデル数、ここで $|$ の個数は $n-1$）

を定義した上で、累積帰納法を用いて論理式の定義の条件 (F1)〜(F5) を忠実に書き上げる仕方で次のように定義する。

$$\begin{aligned}Form(x) \equiv\, &\exists y,z[(y,z < x) \wedge Term(y) \wedge Term(z) \wedge (x = y\&2^{10}\&z)]\\&\vee \exists y,z[(y,z < x) \wedge Form(y) \wedge Form(z) \wedge (x = Imp(y,z))]\\&\vee \exists y[(y < x) \wedge Form(y) \wedge (x = Not(y))]\\&\vee \exists y,z[(y,z < x) \wedge var(y) \wedge Form(z) \wedge (x = Gen(y,z))]\\&\vee \exists n[n < L(x) \wedge \exists y,z_1\ldots z_n\{(y,z_1\ldots z_n < x)\\&\wedge x = y\&paren(z_1\&\ldots\&z_n) \wedge Rel(n,y) \wedge Term(z_1) \wedge \cdots \wedge Term(z_n)\}]\end{aligned}$$

$Form(x)$ によって「x は論理式である」がコード化されたので、述語論理の公理 L1〜L6、AxGen、等号の公理 E1〜E6、PA の公理 P1〜P7、の 20 個の公理がそれぞれのゲーデル数によってコード化される。それらを順に $ax_1(x) \dots ax_{20}(x)$ とする。例えば

$$ax_1(x) \equiv \exists y, z[(y, z \leq x) \wedge Form(y) \wedge Form(z) \wedge (x = y \& 2^3 \& 2^5 \& Imp(z, y) \& 2^6)]$$

であり、他も同様である[*11]。すると $Axiom(x) \equiv ax_1(x) \vee \cdots \vee ax_{20}(x)$ は「x は公理のゲーデル数である」を表す。また推論規則 ModPon は

$$Mdpn(x, y; z) \equiv (x = Imp(y, z)) \wedge Form(y) \wedge Form(z)$$

によって表現される。これはつまり、x が論理式 $P \to Q$ を表し y が論理式 P の、z が Q のゲーデル数のとき「Q は P と $P \to Q$ から導出された論理式である」ことを表している。そこで

$$\begin{aligned} Proof(x) \equiv &(L(x) > 0) \wedge \forall n[0 < n \leq L(x) \to \{Axiom(Pw(n, x)) \\ &\vee \exists p, q(0 < p, q < n) \wedge Mdpn(Pw(p, x), Pw(q, x); Pw(n, x))\}] \end{aligned}$$

によってメタ数学命題「x は証明のゲーデル数である」が表現され、また

$$\mathbb{P}(x, y) \equiv Proof(x) \wedge (y = Pw(L(x), x))$$

は「x は y が表す論理式の証明（のゲーデル数）である」を表現する帰納的関係である。

以上の手続きによって PA の中の全ての形式的論理演算がメタレヴェルでの何らかの（普通の）数学的計算に還元されることになった。つまりオブジェクトレヴェルの（PA の中での）論証は、メタレヴェルでは単なる数字の計算に翻訳されるのであるが、帰納的関数の成し遂げることはそれに留まらない。即ち帰納的関数によって、PA の論理式に関するメタ数学的問題が日常的な普通の自然数についての問題として言い表されるのである! 例えば、「PA のある論理式 P が PA において証明可能であるか?」というメタ数学の問題は「y が P を表すとき、$\mathbb{P}(x, y)$ を満たす自然数 x が存在するか?」という自然数についての（普通の数学の）問題に翻訳される。そして y が PA においてある論理式のゲーデル数であるとき、$\exists x \mathbb{P}(x, y)$ は「y（の表す PA の論理式）が PA で証明可能である」ことをメタレヴェルで表している式である。そしてこれは、ここまでの議論の中に現れた唯一の、帰納的でない（y についての 1 項）関係である。

体系の中のどのような論理式 P に対しても P と P の否定 $(\sim P)$ が同時に（その体系の中で）証明されることがないならばその体系は矛盾を含まない、または**無矛盾**であると言う。すると「体系が無矛盾である」ことを表す式は $consis \equiv \forall x \forall y \forall z [\sim \{\mathbb{P}(x, z) \wedge \mathbb{P}(y, Not(z))\}]$ によって定義される。これは自由変数を含まない論理式、つまり**文章**である（従って自明な意味で帰納的である）。

PA の中の数項記号 0 を $\bar{0}$、$0'$ を $\bar{1}$、$0''$ を $\bar{2}$ というように省略して表す。つまり $\bar{1}, \bar{2} \dots$ は形式的体系 PA の中で自然数を「表現する（represent）」のである。これらは表記の煩雑を避けるた

[*11] 述語論理の公理 L4〜L6 に含まれる附帯条件「P は ξ を自由変項として含む・含まない」、「P は ξ に対して τ を許容する」、$P(\tau|\xi)$ 等がどのように帰納的関係として表現されるかについては [4, 5, 6, 12] などを参照せよ。

めに便宜的に PA の中に導入された単なる略号であり、従ってこれらの略号自体にはゲーデル数が与えられないが、それらは対応する定項 0, 0′ ... のゲーデル数を持つ。PA の論理式は**形式的述語関係**とも呼ばれる。PA の形式的述語関係 $\rho(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ が数論的関係 $r(x_1, x_2 \ldots x_n)$ を**表現する**とは、

$$r(x_1, x_2 \ldots x_n) \text{ が成立 } \rightarrow \ \rho(\overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_n}) \text{ が証明可能}$$

$$r(x_1, x_2 \ldots x_n) \text{ が不成立 } \rightarrow \ \sim\rho(\overline{x_1}, \overline{x_2} \ldots \overline{x_n}) \text{ が証明可能}$$

が全ての自然数 $x_1, x_2 \ldots x_n$ に対して成り立つことを言う。また広義の論理式 $\phi(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ が**形式的演算**であるとは全ての $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ に対して $\phi(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ が項である、即ち $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ から (T1)〜(T5) によって生ずる記号列であることを言う。数論的関数 $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ が形式的演算 $\phi(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ を表現するとは、

$$f(x_1 \ldots x_n) = x_{n+1} \text{ が成立 } \rightarrow \ \phi(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}) = \overline{x_{n+1}} \text{ が証明可能}$$

が全ての自然数 $x_1, x_2 \ldots x_n, x_{n+1}$ に対して成り立つことを言う。次の補助定理（**表現定理**と呼ばれる）は不完全性定理の証明の中で本質的な役割を果たす重要な結果である。

補助定理 G2： 全ての帰納的関数、帰納的関係はそれぞれ PA の何らかの形式的演算、形式的述語関係によって表現される。さらに論理式 $\phi(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_m)$ が関係 $f(x_1, x_2 \ldots x_m)$ を表現し、論理式 $\psi_i(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n)$ が関数 $g_i(x_1, x_2 \ldots x_n)$, $i = 1 \ldots m$ を表現するならば、論理式 $\phi(\psi_1(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n) \ldots \psi_m(\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n))$ は関係 $f(g_1(x_1, x_2 \ldots x_n) \ldots g_m(x_1, x_2 \ldots x_n))$ を表現する。

証明： 証明は帰納的関数の定義 G2 における有限列の中の項（関数）の個数 N（次数と呼ばれる）に関する帰納法によって、やや面倒だが機械的にできる。詳細については補助定理 G1 で挙げた文献を参照せよ。

体系が **ω-無矛盾**であるとは、$\sim \forall\xi P(\xi)$ と $P(\bar{0}), P(\bar{1}) \ldots$ の全てが同時に証明可能となるような自由変項 ξ を持つ論理式 $P(\xi)$ が存在しないことを言う。体系が ω-無矛盾ならば無矛盾でもあるが、逆は成り立たない。即ち次の補題が成り立つ。

補助定理 G3： PA が ω-無矛盾であれば、それは無矛盾である。

証明： $P(\xi)$ を自由変項 ξ を持つ論理式とする。すると全ての n について $P(\bar{n})$ が PA の定理であるか、ある k について $P(\bar{k})$ は定理ではない。初めの場合には、PA の ω-無矛盾性から $\sim \forall\xi P(\xi)$ は定理ではない。二番目の場合には $P(\bar{k})$ が定理ではない。従って PA は無矛盾である。Q.E.D.

そこで、不完全性定理は次のように述べられる。

第 1 不完全性定理： もし PA が ω-無矛盾であるならば、PA のある文章 G が存在して G も $\sim G$ も PA において証明されない（G は PA で決定不可能である）。

証明： 今 q が自由変項 ζ を持つある論理式のゲーデル数を表す時に、ζ を $\bar{y}$ で置き換えたその論理式のゲーデル数を $s(q,y)$ と書くことにする。任意の論理式 P と任意の定項 κ 及び変項 ζ について $P(\kappa|\zeta)$ は帰納的にコード化されるので、数論的関数 $s(q,y)$ が帰納的であることを証明できる[*12]。従って補助定理 G2 によって $s(q,y)$ を表現する論理式（2 項演算）$\sigma(\theta,\eta)$ が存在する。$\mathbb{P}(x,y)$ もまた帰納的であったから、同様に $\mathbb{P}(x,y)$ を表現する論理式（2 項述語） $\Pi(\xi,\eta)$ が存在する。そこで $\Omega(\zeta)=\forall\xi\big[\sim\Pi(\xi,\sigma(\zeta,\zeta))\big]$ と置いて、$\Omega(\zeta)$ のゲーデル数を p とする。$G=\Omega(\bar{p})$ と定義すると G は、$s(q,y)$ の定義で $q=p$、$y=p$ の場合に相当するから、ゲーデル数 $s(p,p)$ を持つ。従ってもしも G が（PA で）証明可能ならば、ある自然数 k が存在して $\mathbb{P}(k,s(p,p))$ が（メタレヴェルで）成立することになる。ところで $\Pi(\xi,\eta)$ は $\mathbb{P}(x,y)$ を表現し、$\sigma(\theta,\eta)$ は $s(q,y)$ を表現するのであったから、補助定理 G2 によって $\Pi(\xi,\sigma(\theta,\eta))$ は $\mathbb{P}(x,s(q,y))$ を表現し、従って $\Pi(\bar{k},\sigma(\bar{p},\bar{p}))$ は PA において証明可能である。述語論理の公理 L5 と推論規則 ModPon から、任意の論理式 P について、もし $\forall\xi P(\xi)$ が証明可能ならば、全ての ℓ について $P(\bar{\ell})$ が証明可能であることを示せる。従ってもし $G=\forall\xi[\sim\Pi(\xi,\sigma(\bar{p},\bar{p}))]$ が証明可能ならば $\sim\Pi(\bar{k},\sigma(\bar{p},\bar{p}))$ は証明可能となり、他方 $\Pi(\bar{k},\sigma(\bar{p},\bar{p}))$ もまた証明可能であったから、これは PA が矛盾していることを示す。ゆえに G は PA で証明できない（ここまでは PA の ω-無矛盾性ではなく、単にその無矛盾性しか用いていないことに注意せよ）。

次に $\sim G$ が PA で証明できないことを示そう。PA が ω-無矛盾ならば、補助定理 G3 によってそれは無矛盾である。そのとき G が PA で証明できないことはたった今示された。ところで $G=\Omega(\bar{p})$ のゲーデル数は $s(p,p)$ であったので、これは「いかなる自然数 k に対しても $\mathbb{P}(k,s(p,p))$ はメタレヴェルで成立しない」ことを示している。$\Pi(\xi,\sigma(\theta,\eta))$ は $\mathbb{P}(x,s(q,y))$ を表現するのだから、PA では $\sim\Pi(\bar{k},\sigma(\bar{p},\bar{p}))$ が全ての k に対して証明可能である。それゆえ PA の ω-無矛盾性から、$\sim G=\sim\forall\xi[\sim\Pi(\xi,\sigma(\bar{p},\bar{p}))]$ が証明可能となることはあり得ない。Q.E.D.

この証明は原論文 [4] ではなく、より簡明に述べられたプリンストン高等研究所での講義ノート [5] に従った。しかしいずれにしても証明の基本的なアイディアは同じであり、それは決定不可能命題 G をいかにして構成するかに尽きる。そこで述べられている通り G はゲーデル数 $s(p,p)$ を持ち、$\mathbb{P}(x,s(p,p))$ は「x はゲーデル数 $s(p,p)$ を持つ論理式（つまり G 自身）の証明のゲーデル数である」を意味する式である。ところで $s(p,p)$ と $\mathbb{P}(x,y)$ はそれぞれ論理式 $\sigma(\bar{p},\bar{p})$ と $\Pi(\xi,\eta)$ によって表現されるのだから、$\Pi(\xi,\sigma(\bar{p},\bar{p}))$ は「ξ は G の証明である」を表現することになり、これから $G=\forall\xi[\sim\Pi(\xi,\sigma(\bar{p},\bar{p}))]$ は「どのような ξ も G の証明となることはない」を表していることが分かる。即ち決定不可能命題 G とは「G は証明不可能である」ことを主張する命題なのである。「この命題は証明不可能である」こと、つまり自分自身の証明不可能性を主張する命題が「この言明は虚偽である」という文章と同様の奇妙な性格のものであることは直観的にも明らかであろう。ゲー

[*12] その証明は難しくないがここでは省略する。脚注*11 に挙げた参考書を参照して欲しい。

デルがこの証明のアイディアを「嘘つきのパラドックス」に喩えた理由がこれで分かるだろう。

ところで第 1 不完全性定理の証明の前半で、PA が無矛盾であれば、ゲーデル数 $s(p,p)$ を持つ論理式（文章）G が PA で証明できないことが示された。即ち我々は

$$consis \to \forall x[\sim \mathbb{P}(x, s(p,p))]$$

をメタレヴェルで証明したわけである（$consis$ は「PA は無矛盾である」をメタレヴェルで表現する文章であった）。そこで $consis$ を表現する PA の論理式（文章）を $\kappa o\nu\sigma\iota\sigma$ とすると、これまでのメタレヴェルでの証明をすっかりそのまま形式化することによって、PA の中で

$$\kappa o\nu\sigma\iota\sigma \to \forall \xi[\sim \Pi(\xi, \sigma(\bar{p},\bar{p}))]$$

を証明できることは明らかである[*13]。いまもし $\kappa o\nu\sigma\iota\sigma$ が PA で証明可能であるならば、推論規則によって $\forall \xi[\sim \Pi(\xi, \sigma(\bar{p},\bar{p}))]$、即ち G が PA で証明されることになり、これは矛盾である。従って第 1 不完全性定理の系として、次の有名な結果（無矛盾な体系では自分自身による無矛盾性の証明が不可能であること）が得られた。

第 2 不完全性定理： もし PA が無矛盾であるならば $\kappa o\nu\sigma\iota\sigma$ は PA において証明されない。

以上が不完全性定理（とその証明）の概略である。不完全定理は PA が決定不可能命題を含むことを主張する一つのメタ定理であるが、その証明は、全てが定理の仮定と諸概念の定義から通常の数学的手続きに従って導出される、それ自身は決して特別でも何でもないしごくありふれた議論に過ぎないことが分かるだろう。当然のことながら、ここには神秘的な事柄などは何も存在しない。しかしこうした算術（数の計算）といった基本的な事柄についての人間の認識を根本的に変えてしまうような大きな科学的業績には、とかく興味本位の無責任な噂話がつきものである。

例えば、不完全性定理は PA の（ω-）無矛盾性の仮定のもとに証明された。確かに我々は PA が（ω-）無矛盾であるかどうか知らないし、実際第 2 不完全性定理によれば PA が無矛盾であることすら PA の中では証明されない[*14]。従って我々は PA の無矛盾性を疑う（あるいは疑うふりをする）ことができる。だからと言って諸君はメタレヴェルで（日常生活で）自分が何時も使っている自然数の全体が何処かに矛盾を含むかもしれない、などと疑ってはならない。もしも普通の自然数の体系が本当に疑わしいのであれば、諸君には上の証明は読めないだろう。私は冗談を言っているのではない。私がこれを言うのは、現在のところ世間には「ゲーデルは、数学には理論的（理性的）基礎が存在しないことを証明した、従って数学さえも絶対に確実な学問とは言えない」などといった類の、それこそ冗談のような戯言が流布しており、諸君はもしかしたらそのうちのどれかを耳にしたことがあるかもしれないからだ。これらの戯言は厳密な科学（数学）理論から迷信が生じ得る可能性を示しており、科学に対する無知・無理解から発生した最も低級なイデオロギーの実例である（過去に相対性理論からも似たような馬鹿げた流言が発生したことがあった）。

[*13] もちろんそれを実行するには大変な手間がかかるけれども。さらに我々がここまでメタレヴェルで行ったことを全てオブジェクトレヴェルで再現するためには、PA に n 項演算記号及び n 項述語記号を含めなければならない。

[*14] しかし PA の無矛盾性は、PA には含まれない論証手段（超限帰納法と呼ばれる）に訴えてゲンツェン [3] によって証明された。関心のある諸君は、数学基礎論や論理学の専門書を参照して欲しい。

不完全性定理が <公正としての正義> との間に（結果ではなく）議論の立て方に関して非常な類似性が存在していることについては既に幾度となく述べた。つまり、現実世界に (メタレヴェルに）存在する我々は、自分の興味の対象（ゲーデルにとっては「数学の基礎」、ロールズにとっては「秩序ある社会」）についての認識を得るために何らかの理論装置（ゲーデルはペアノ算術、ロールズは原初状態）を設定し、それを分析するのである。諸君は実際に定理の証明を自分で追ってみて、第 2.1 節で引用したロールズの指摘が当を得ていることを納得してくれただろう（そう期待する)。その分析に際して我々が信頼し、頼みとする手段は何も特別のものが存在するわけではない。つまり結局のところそれは自分の常日頃から持っている「常識」(ゲーデルの数学、ロールズと我々の社会観)、「直感」(ゲーデルの数学的直感、ロールズと我々の正義感覚)、そして何より「道理に適った（理性的な）推論と判断」(ゲーデルも、ロールズも、我々自身も）である。実際それら以外に他の何が有り得ると言うのか! そして共同体主義者による「原初状態の人々の設定が抽象的過ぎて人々の個性を無視している」という類の批判は、単に自己の印象に基づいてなされているのであって、理性的根拠に欠けるものであることも今や明らかであろう。つまり、一般に理論モデルの意図は「認識の助けになる」ことであって、「現実（実践）をそのままに記述（描写）する」ことではないから、そうしたモデルから受ける印象は時に、非常に現実離れしたものとなることがある。諸君はペアノ算術という形式体系において「１＋１＝２」は証明を要する「定理」であって、実際その「証明」がどれ程長いものであるか、一見したところでは難解な印象すら与えることを見たであろう。それは現実の日常生活におけるその計算（とすら呼ばないかもしれない）とは懸け離れた似ても似つかないものである。原初状態や一般均衡モデルが非現実的であると主張する批判者たちは、これ程「非現実的な」ペアノ算術も何故同じように批判しないのか? しかし残念ながらこうした「批判」がこれ程根強く居座っている現状では、これらの理論におけるいわゆる「モデル」は認識のための表象装置なのであって現実の記述や描写ではないことを幾ら強調しても、この主張が受け入れられるのは難しいようである*15。

---

*15 論理学の公理系は論理そのものであって経済学などのいわゆる「モデル」とは異なる、と主張する数学者（論理学者）もいるかもしれない（実際メタ論理学では、形式体系に対して集合論の言語を用いて**モデル**と呼ばれる概念が定義され、論理式の真偽の解釈が行われる [7, p.145] のだが、いま我々がここで述べている「モデル」はもちろんこの意味ではない)。しかし考えてみて欲しいのだが、1 階の述語論理などの公理系は数学者が日常行っている論理的な操作（実践）を厳密に理解しようとする論理学者たちの努力以外の何から生まれたと言うのだろうか。ゲーデルによって述語論理の完全性と算術の不完全性が発見された時にこの公理系そのものが数学の対象となることが明らかとなり、それとともにメタ数学（メタ論理学）という新しい理論的学問が成立したのではないのか。次の章で説明する通り、経済学の理論モデルもまた、現実の経済現象（それは人々の経済取引を初めとする様々な実践からなる）を厳密に理解しようとして出発した幾人かの経済学者の努力によって徐々に形成されていった結果、古典派の唱えていた労働価値の概念が限界効用概念に置き換えられた時に、モデルそのものを理論的分析対象とする新古典派経済学が成立したのである。もちろんメタ数学とメタ倫理学や市場モデル分析との間には非常な違いが確かにある。原初状態や市場モデルは複雑な現実を単純化するために設定されるのだが、数学では単純な現実（１＋１＝２）が形式体系ではむしろ複雑なものとなる。何故であろうか? これは哲学的に興味深いことではないか?

追記：あるいはそうではないのかもしれない。前節までに我々の証明した <公正としての正義> の五つの定理はもともと １＋１＝２ と同じ位に自明な命題だったのかもしれない。それぞれの「定理」を原初状態の中で何行も費やして「証明」しなければならなかったのは、PA における １＋１＝２ の証明と同様に、日常生活では当たり前の事柄について厳密性を期するために複雑な論証を行う必要があったということなのかもしれない（しかしそれならば、１＋１＝２ とは違ってあれらの定理の主張が、決してこの講義を始める前から周知のものというわけでなかったのは何故なのか？)。

（等号を含んだ）述語論理の体系と PA の公理の他に更なる他の公理を加えて、PA よりも強い（より沢山の定理を証明できる）形式体系を設定することができるが、ゲーデルの証明の方法はそのような体系に対してもそれが（ω-）無矛盾である限り、多少手直しすれば（$Axiom(x)$ 等の帰納的関数を少し手直しすれば）通用することは明らかである。現在のところ、ZF などと呼ばれる集合論の公理系（または ZF と同等な他の公理系）が全ての数学理論（もちろん初等数論も含めて）をその中で表現するのに十分な公理系と考えられているが、ゲーデルの証明は、ZF 集合論でさえもそれが（ω-）無矛盾である限り、その無矛盾性を自身において証明することはできないことを示している（これがゲーデルの定理が数学者たちに衝撃をもたらした理由であろう）。しかし不完全性定理の本質は PA に関して述べられた命題で尽きているのであって、「ペアノ算術は（それが ω-無矛盾ならば）その中に決定不可能な論理式を含む」ことそして、「ペアノ算術は（それが無矛盾である限り）自分自身の無矛盾性を証明できない」こと、これらこそがまさに驚くべき結果なのであり、そして定理とその論証全体が繊細でかつ力強く、美しいのである。スピノザは「真理はそれ自身によって自らを明らかにする」と言った。スピノザの言う <第三種の認識> とはそのように自ら現れ出た真理に対する認識なのであり、そして第三種の認識を得た時、その人は幸福である。スピノザやゲーデル、そしてロールズのように真理を自ら認識しそれを書き残す偉大な天才達は、こうして人類に最高の贈り物をする。そして彼ら自身は、スピノザの『エチカ』第五部定理 23 によれば、永遠に生きる。彼らは人類の（歴史の）栄光である。

最後にこの補論の意味について一言述べておく。諸君の中には、<公正としての正義> とは直接には関係のない、しかも難解な（少なくともかなり複雑な論証を必要とする）数学基礎論の定理について、補論でとはいえ、何故これ程長々と議論しなければならないのかについて疑問を持った人もいることと思う。さらにはこうした難しい数学の定理を引き合いに出しそれとの類似性を強調することによって、鈴木は <公正として正義> に虎の威を借りて箔を付け、お墨付きを与えようとしたのではあるまいかと疑っている人もいるかもしれない。そういう諸君の疑いに対して、私は特に弁解するつもりはない。確かに私はロールズの示唆に導かれて不完全性定理を検討してみた結果、<公正としての正義> の論証の形式と不完全性定理のそれの間に存在する著しい類似性に気づき、深い感銘を受けた。その印象は、自身の考えをさらに押し進めていくための自信と勇気を与えてくれた。私はその経験を諸君に語りたかったのである。だが同時に似ているのは「考え方」だけであって定理の結果それ自体ではないのだから、不完全性定理の説明はこの講義それ自身には特に必要ないことも確かである。それゆえ興味のない人はこの補論を無視しても構わないと断った上で始めたのであった。しかしここまで読んでくれた諸君には、数学基礎論と政治哲学との類似だけではなく両者の違いについても、さらに一言注意しておかなければならない。

第 1 不完全性定理の証明の後で少し触れたが、不完全性定理は形式化された自然数論 PA に対して（ω-）無矛盾性を仮定する、つまりその無矛盾性を断り無しの前提とはしないが、だからといって我々は定理の証明のためにメタレヴェルで用いる数学的概念や道具、例えば帰納的関数を初めとする自然数論の諸概念や自然数の体系それ自体、及びそれらにかかわる数学的実践（つまり日常の数計算）を、例の流言に誑かされているのでもない限り微塵も疑ったりはしないし、そもそもそれらを「疑う」ことに意味がない。そして不完全性定理は普通の数学の定理と同じ仕方で証明され、

従ってその結果の正当性にはいささかの疑念も生じない。しかし <公正としての正義> は違う。自ら設定した原初状態に対して哲学的分析・推論を行う時の（メタレヴェルでの）自らの社会常識や正義感覚を疑わないどころではない、常に疑っているべきなのである。我々が定理として述べた主張を証明する際にも、そこでかろうじて確信めいたものを持てるのは、自身の行う推論が道理に適っている（reasonable）かどうかということだけであるが、それとて完全に形式化されているわけではない、即ち数学的（記号論理的）な推論ではない哲学的推論に対しては、ゲーデルの定理の証明に得心がいく程には確信を持つことはできない。そうであればこそ、メタ倫理学はその結論の正当化に際してメタ数学には必要とされなかった更なる議論を必要とする。それが反照的均衡なのである。

反照的均衡とは、その本質においては、理論の出発点（二つの公理）と到達点（正義の二原理）との間にバランスがとれており、そして両者を繋ぐ論証の全体が無理なく自然に運んでいると我々が信じられる時に達成される、というのがその「定義」であった。この考えはロールズがその持てる全ての理性の力を傾けて、彼の崇高な人格の奥底から振り絞るようにしてつむぎ出した、現在までに政治哲学が到達し得た自己正当化の最後の手段である。反照的均衡によって <公正としての正義> は言わばぎりぎり、かかとで踏ん張っている（持ち堪えている）。これが現状においてメタ倫理学が差し出すことのできる、自身の無罪を立証する証拠の全てである。

忘れないで欲しい。人は行動においても思考においても様々な過ちを犯す存在であるが、しかし、過つことは誤魔化すこととは違うのだ。実際、あれらの思想の英雄たちは常に過りを犯す可能性と隣り合わせで思索を巡らし（彼らとて人間なのであるから）、誤魔化し（認識の妥協）の誘惑をきっぱりとはねのけながら、全人類に対する責任を一身に引き受けつつ、彼らの偉大な真理をその手に掴んだのである。倫理とは認識を誤魔化さないことである。そして憶えておいて欲しい、この意味での倫理が存在しないところに真理は存在せず、権利も、正義も、そして恐らくは自由さえも存在しないであろうことを。

参考文献

[1] Arrow, K., (1963) *Social Choice and Individual Values*, 2-nd ed. J. Wiley, NY,『社会的選択と個人的評価』長名寛明訳、日本経済新聞社 1977 年

[2] Arrow, K., and G. Debreu, (1954) "Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy", *Econometrica* **22**, 265–290.

[3] Gentzen, G., (1936) "Die Wider-spruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie", Mathematische Annalen **112**, 493–565.

[4] Gödel, K., (1931) "Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I", *Monatshefte für Mathematik und Physik* **38**, 173–198,『不完全性定理』林晋・八杉麻利子訳、岩波文庫　2006 年

[5] Gödel, K., (1934) "On Undecidable Propositions of Formal Mathematical Systems", in *Kurt Gödel Collected Works* Volume I, edited by S. Feferman et al, Oxford University

Press, Oxford, 1986.

[6] Kleene, S.C., (1971) *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsrerdam.

[7] Margaris, A., (1967) *First Order Mathematical Logic*, Dover, New York.

[8] Nash, J.F., (1950) "Equilibrium Points in N-Person Games", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A* **36**, 48–49.

[9] Neumann, J.v., and O. Morgenstern, (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, 『ゲームの理論と経済行動 (1 ～ 3)』 (ちくま学芸文庫) 筑摩書房 2009 年

[10] Rosser, B., (1936) "Extensions of Some Theorems of Gödel and Church", *The Journal of Symbolic Logic* **1**, 87–91.

[11] Rosser, B., (1939) "An Informal Exposition of Proofs of Gödel's Theorems and Church's Theorem", *The Journal of Symbolic Logic* **4**, 53–60.

[12] 広瀬健著 『帰納的関数』共立出版 1989 年