

2024 年 度

数 学

注 意

1. 監督者の合図があるまでは問題冊子と解答用紙を開かないでください。
2. 解答はすべて解答用紙の決められた箇所に記入してください。
3. 試験開始後、解答用紙に氏名・受験番号を記入してください。
4. 試験問題はこの冊子の 1 ～ 2 ページに記載されています。
問題冊子の白紙部分は、適宜利用して構いません。
5. 問題Ⅱについては、解答用紙のオモテ面で不足する場合に限って、ウラ面に解答を続けても構いません。
その場合は、ウラ面に続くことをオモテ面の下端に明記してください。
またウラ面の使用については、穴が開いている側を下向きにして記入してください。
6. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰ってください。

I 以下の空欄 から をうめなさい。

(1) $0 \leq \theta \leq \pi$ である θ に対して, $x = \sin \theta - \cos \theta$,

$y = \sin \theta - \cos \theta + \sin 2\theta$ とおくとき, x のとりうる値の範囲は である。また, y を x を用いて表すと, $y =$ であり, y のとりうる値の範囲は である。

(2) 座標平面上に, 2 点 $A(7, -2)$, $B(0, -1)$ および 2 つの直線

$\ell: y = -\frac{1}{2}x + 4$, $m: y = ax + 2a^2 + 1$ ($a > 1$) がある。直線 ℓ に関して点 A と対称な点 A' の座標は であり, 直線 m に関して点 B と対称な点 B' の座標は である。また, 点 P , Q がそれぞれ直線 ℓ , m 上を動くとき, $AP + PB$ の最小値は であり, $AP + PQ + QB$ の最小値は である。

(3) 20 の階乗を素因数分解すると

$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot$ $\cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ となる。ここで,
 $48 < 7^2 < 50$, $200 < 11 \cdot 19 < 225$, および $200 < 13 \cdot 17 < 225$ であることを用いると, $2^{20} \cdot 3^9 \cdot 10^8 < 20! < 2^9 \cdot 3^{12} \cdot 10^{10}$ が成り立つ。よって, $20!$ は 桁の数であり, その一番大きい位の数字は である。
また, 正の整数 n に対して $3^n < 20! < 3^{n+1}$ が成り立つとき, $n =$ である。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

Ⅱ 正の整数 n に対して, x についての分数式を $P_n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ で定める。以下の問いに答えなさい。

(1) P_2 と P_3 を x の多項式として表しなさい。

(2) $(P_2)^6$ を展開したとき, x^2 の係数と x^{10} の係数を求めなさい。

(3) $(P_3)^6$ を展開したとき, x^9 の係数を求めなさい。

(4) 正の整数 n, m に対して, $(P_n)^m$ を展開したとき, x^k の係数を a_k とする。 $\sum_{k=0}^{nm} a_k$ を求めなさい。