

2025 年度

数学解答例

I

(1)	ア	60° または $\frac{\pi}{3}$	イ	20
	ウ	$\frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$	エ	$\frac{25}{2}$
(2)	オ	$\frac{6}{25}$	カ	$\frac{37}{100}$
	キ	$\frac{98}{125}$	ク	$\frac{33}{1000}$
(3)	ケ	$-\sqrt{3}$	コ	2
	サ	$t^2 + 2t + 1$	シ	9
	ス	0		

II

(1)

$y = -3x^2$ について導関数を求めると、 $y' = -6x$ なので、点 P における接線は、

$$\ell_1: y = -6px + 3p^2$$

点 Q における接線は、

$$\ell_2: y = -6qx + 3q^2$$

である。

(2)

$A(\alpha, \beta)$ は、 ℓ_1 , ℓ_2 の共有点なので、

$$\beta = -6p\alpha + 3p^2, \beta = -6q\alpha + 3q^2$$

が成り立つ。

この連立方程式を解くと、

$$\alpha = \frac{p+q}{2}, \beta = -3pq$$

と求まる。

(3)

S を求めると、

$$\begin{aligned} S &= \int_p^\alpha (3x^2 - 6px + 3p^2)dx + \int_\alpha^q (3x^2 - 6qx + 3q^2)dx \\ &= [x^3 - 3px^2 + 3p^2x]_p^\alpha + [x^3 - 3qx^2 + 3q^2x]_\alpha^q \\ &= (q^2 - p^3) - 3\alpha(q^2 - p^2) + 3\alpha^2(q - p) \\ &= \frac{(q - p)^3}{4} \end{aligned}$$

となる。

(4)

$S = \frac{(q-p)^3}{4} = 2$ で $p < 0 < q$ より、 $q - p = 2$ を得る。また、 ℓ_1, ℓ_2 が直交するため、それぞれの傾きの積は -1 となる。すなわち、 $pq = -\frac{1}{36}$ であることを用いて、

$$\alpha^2 = \frac{(p+q)^2}{4} = \frac{(q-p)^2 + 4pq}{4} = \frac{35}{36}$$

となるので、 $\alpha = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$ と求まる。