明治学院大学2025年度一般入試（2025年2月3日実施）
「数学」解答例

2025 年度　数学解答例

I

(1)	ア	$(-2, \frac{3}{2})$	イ	$(3,4)$ と $(-3,-4)$
	ウ	$y = \frac{4}{3}x$	エ	$\frac{5}{2}$
(2)	オ	-6	カ	5
	キ	$\sqrt{52} = 2\sqrt{13}$	ク	8
(3)	ケ	$\frac{1}{2}$	コ	$\frac{1}{3}$
	サ	2	シ	3

II

(1)

$a_1 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$a_2 = \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{4}$

(2)

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$であり、$0 < \alpha < \pi$より$\sin\alpha \neq 0$であるから、$\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2\sin\alpha}$ となる。

(3)

漸化式を繰り返し用いて、$a_n = \cos\alpha\cos 2\alpha\ \ \cos 4\alpha \cdots \cos(2^{n-1}\alpha)$を得る。一方で、$\sin(2^k\alpha)$ $(k = n, n-1, n-2, \dots, 1)$に対して倍角の公式を繰り返し用いることにより

$$\begin{aligned}
\sin(2^n\alpha) &= 2\cos(2^{n-1}\alpha)\sin(2^{n-1}\alpha) \\
&= [2\cos(2^{n-1}\alpha)][2\cos(2^{n-2}\alpha)]\sin(2^{n-2}\alpha) \\
&= \cdots \\
&= 2^n[\cos(2^{n-1}\alpha)\cos(2^{n-2}\alpha)\cdots\cos 2\alpha\cos\alpha]\sin\alpha \\
&= 2^n a_n \sin\alpha
\end{aligned}$$

を得る。

$0 < \alpha < \pi$より$\sin\alpha \neq 0$であるから、

明治学院大学2025年度一般入試（2025年2月3日実施）
「数学」解答例

$$a_n = \frac{\sin(2^n \alpha)}{2^n \sin \alpha}$$

(4)
前問(3)より、恒等式

$$a_n = \cos\alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha \cdots \cos(2^{n-1}\alpha) = \frac{\sin(2^n\alpha)}{2^n \sin\alpha} \qquad \cdots\cdots\cdot \quad (*)$$

が成り立つ。$\alpha = \frac{\pi}{7}$とすると、$(*)$より、

$$a_3 = \cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}$$

$$= \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right)}{8\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= \frac{-\sin\frac{\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}$$

一方、$\cos\frac{3\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right) = -\cos\frac{4\pi}{7}$より、

$$\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{7} = -\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8}$$

(5)
$\alpha = \frac{\pi}{5}$とすると、$(*)$より、

$$a_2 = \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}$$

$$= \frac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right)}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{\sin\frac{\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \frac{1}{4}$$

一方、$\cos\frac{2\pi}{5} = 2\cos^2\frac{\pi}{5} - 1$ 。$\cos\frac{\pi}{5} = x$とおくと、$x(2x^2 - 1) = \frac{1}{4}$が成り立つ。この方程式の解は、$x = -\frac{1}{2}, \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$であるが、$x > 0$なので、$x = \cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$を得る。