

数学解答例

I

(1)	ア	$\frac{1}{4}$	イ	1
	ウ	$\frac{1}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^n$	エ	$5^n - 4^n$
(2)	オ	$\frac{19}{36}$	カ	$\frac{1}{18}$
	キ	$\frac{5}{18}$	ク	$\frac{1}{12}$
(3)	ケ	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	コ	$\sqrt{2} - 1$
	サ	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	シ	$2 - \sqrt{3}$

※ $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ は両方正解の場合のみ正解とする。また, $\boxed{\text{イ}} = \frac{5}{4}$, $\boxed{\text{ウ}} = \frac{1}{4}$ の組み合わせについても正解とする。

II

(1) 2つの放物線の方程式から y を消去すると,

$$2x^2 - 2ax + a^2 + a - \frac{3}{2} = 0.$$

この方程式の判別式は

$$D' = a^2 - 2\left(a^2 + a - \frac{3}{2}\right) = -(a+3)(a-1).$$

$D' > 0$ の条件を解き, a の値の範囲として

$$-3 < a < 1$$

が求まる。

(2) 2つの放物線の交点の座標は

$$\left(\frac{a \pm \sqrt{D'}}{2}, \frac{a}{2} - \frac{3}{4} \pm \frac{a\sqrt{D'}}{2}\right)$$

と求まる (複号同順)。よって中点の座標は

$$(x, y) = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} - \frac{3}{4}\right)$$

となる。これを解いて, (1) で求めた範囲も考慮すると, 軌跡は次式で表される線分となる:

$$y = x - \frac{3}{4} \quad \left(-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

(3) $a = -1$ のとき,

$$C_1: y = x^2 - \frac{5}{2}, \quad C_2: y = -x^2 - 2x - 1.$$

これらの放物線の2つの交点の x 座標は, それぞれ

$$x = -\frac{3}{2}, \quad x = \frac{1}{2}.$$

よって, 求める領域の面積は

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ (-x^2 - 2x - 1) - \left(x^2 - \frac{5}{2} \right) \right\} dx = \frac{8}{3}.$$