2026 年度　　数学解答例

I

(1)	ア	$\frac{2}{5}$	イ	$\frac{\sqrt{21}}{5}$
	ウ	$\frac{7\sqrt{21}}{2}$	エ	$5\sqrt{21}$
(2)	オ	$\frac{3}{8}$	カ	$\frac{35}{128}$
	キ	$\frac{15}{128}$	ク	$\frac{5}{32}$
(3)	ケ	647	コ	$8 \cdot 9^{n-1} - 1$
	サ	$9^n - n - 1$	シ	3

II

(1) $0 \leqq a \leqq 1$のとき，２つの三角形が重なり合う部分は対角線の長さがaの正方形であるから

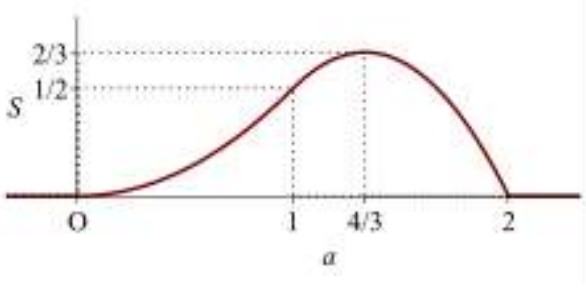
$$S = \frac{a^2}{2}.$$

(2) $1 \leqq a \leqq 2$のとき，2 つの三角形が重なり合う部分は対角線の長さがaの正方形から，底辺の長さが$2(a-1)$，高さが$a-1$の直角二等辺三角形を 2 つ取り除いた領域であるから，

$$S = \frac{a^2}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2(a-1) \cdot (a-1)$$

$$= -\frac{3}{2}a^2 + 4a - 2.$$

(3) $a < 0$および$a > 2$の範囲では，2 つの三角形は重なり合わないので$S = 0$．よって(1)(2)の結果と合わせるとグラフは下図のようになる：



また$1 \leqq a \leqq 2$のとき，$S = -\frac{3}{2}a^2 + 4a - 2 = -\frac{3}{2}\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{2}{3}$ より，

$$S\text{の最大値} = \frac{2}{3}\,.$$

(4) $0 \leqq a < 1$の範囲でaを固定すると，Sは$b = 0$のときに最大となる．(1)の結果よりその最大値は$\frac{1}{2}$未満．したがって$1 \leqq a \leqq 2$の範囲を考えればよい．以下，aを固定しbの値について場合分けをして考える．

(i) $\sqrt{3}|b| \leqq 2 - a$の場合，2 つの三角形が重なり合う部分は，底辺の長さが 2，高さが 1 の直角二等辺三角形から，これと相似な高さ$a - 1$，高さ$\frac{2-a+\sqrt{3}b}{2}$，高さ$\frac{2-a-\sqrt{3}b}{2}$の 3 つの三角形を取り除いた領域である(ただし，取り除く三角形の高さが 0 になる場合を含む)．よって

$$\begin{aligned} S &= 1 - (a-1)^2 - \left(\frac{2 - a + \sqrt{3}b}{2}\right)^2 - \left(\frac{2 - a - \sqrt{3}b}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{2}\left(a - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{3}{2}b^2 + \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

ゆえに

$$S \geqq \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(a - \frac{4}{3}\right)^2 + b^2 \leqq \left(\frac{1}{3}\right)^2.$$

(ii) $2 - a < \sqrt{3}|b| \leqq a$の場合，2 つの三角形が重なり合う部分は底辺の長さ$a - \sqrt{3}|b|$，高さ$2 - a$の平行四辺形であり，

$$S = (2-a)\left(a - \sqrt{3}|b|\right) < (2-a)(2a-2) = -2\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2}.$$

すなわち $S < \frac{1}{2}$ であるから，この場合に条件を満たす(a, b)の組は存在しない．

(iii) $a < \sqrt{3}|b|$の場合，2 つの三角形は重なり合わない．

以上をまとめると，求める範囲は$(a, b) = \left(\frac{4}{3}, 0\right)$を中心とする半径$\frac{1}{3}$の円（下図）の内部および境界．