２０２５年度　情報数理学科

数学文章問題

［自己推薦 AO（A）］

サンプル問題

以下の問題Ⅰと問題Ⅱに解答しなさい。解答は計算結果のみではなく，結果に至るまでの過程も明らかにすること。

問題Ⅰ　θ を π の整数倍を除く一般角とするとき，$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ を θ の余接という。△ABC の 3 つの角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C で表す。△ABC において，3 つの角の余接の和

$$I = \cot A + \cot B + \cot C$$

を考える。不等式 $A \leqq B \leqq C$ を満たしつつ △ABC の形を自由に変化させたときの I の最小値を求めたい。以下の問いに答えなさい。

(1)　正弦，余弦の加法定理から出発し，$\cot A$ と $\cot B$ を用いて $\cot(A+B)$ を表す式を導きなさい。

(2)　(1)の結果を用いて，$\cot C$ を $\cot A$ と $\cot B$ で表しなさい。

(3)　$\cot A + \cot B = t$ として，t が定数として与えられたとき，I の最小値を求めなさい。

(4)　(3)の t の値がとりうる範囲を求めなさい。

(5)　I の最小値を求めなさい。また，I が最小となるのは △ABC がどのような場合か。

問題Ⅱ　数直線上を動く点Pが原点の位置にある。1枚の硬貨を投げて，表が出たときは点Pを正の向きに1だけ進め，裏が出たときは点Pを負の向きに1だけ進める。ただし，1枚の硬貨を投げたとき，表が出る確率と裏が出る確率はそれぞれ同じ $\dfrac{1}{2}$ とする。以下の問いに答えなさい。

(1)　硬貨を N 回投げ終わったとき，表が k 回出た。そのときの数直線上の点Pの位置 x_k を求めなさい。

(2)　硬貨を N 回投げ終わったとき，表が k 回出る確率 p_k を求めなさい。

(3)　硬貨を N 回投げ終わったとき，数直線上の点Pの位置の期待値 $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} x_k p_k$ が0であることを示しなさい。必要であれば，

$$\sum_{k=0}^{N}(k \times {}_N C_k) = N2^{N-1}$$

であることを公式として用いてよいが，可能であればこの公式の証明も試みること。

(4)　硬貨を N 回投げ終わったとき，数直線上の点Pの位置を2乗したものの期待値 $\displaystyle\sum_{k=0}^{N}(x_k)^2 p_k$ を求めなさい。必要であれば，(3)で用いた公式および

$$\sum_{k=0}^{N}\left(k^2 \times {}_N C_k\right) = N(N+1)\,2^{N-2}$$

であることを公式として用いてよいが，可能であればこの公式の証明も試みること。

(5)　点Pの位置の期待値が0のとき，点Pの位置を2乗したものの期待値を分散といい，その平方根を標準偏差という。数直線上の点Pの位置の標準偏差を硬貨を投げた回数 N の関数と見たとき，どのようなことがわかるか説明しなさい。